ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Διδάσκοντες: Α. ΤΟΛΙΑΣ, Π. ΤΣΑΜΑΤΟΣ

Εξεταστική περίοδος Σεπτεμβρίου 2014

Θέμα 1. [1 μον.]
Να εξετάσετε αν καθεμιά από τις δύο παρακάτω λογικές προτάσεις είναι ταυτολογία

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim (p \wedge (\sim q))) \qquad \Big((p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)\Big) \Leftrightarrow \Big(((p \wedge q) \Rightarrow r)\Big).$$

Θέμα 2. [2 μον.]
(α) Αν A, B είναι δύο σύνολα, να δείξετε ότι $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$.
(β) Αν $A = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}$ και $B = \Big\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\Big\}$ να βρείτε το σύνολο $(\mathcal{P}(A) - B) \cup (\mathcal{P}(B) - A)$.
(γ) Αν A, B, Γ είναι τρία σύνολα ώστε να ισχύουν οι σχέσεις

$$\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(\Gamma), \quad \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(\Gamma) \cap \mathcal{P}(A), \quad \mathcal{P}(\Gamma) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

να δείξετε ότι $A = B = \Gamma$.

Θέμα 3. [2 μον.]
(α) Να ορίσετε μια σχέση ισοδυναμίας το σύνολο $E = \{a, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\}$ η οποία να έχει ακριβώς τρεις κλάσεις ισοδυναμίας με διαφορετικό πλήθος στοιχείων η καθεμιά.
(β) Στο σύνολο $X = \{x, y, z, w\}$ να ορίσετε μια σχέση μερικής διάταξης η οποία να έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο και να μην είναι γραμμική (ολική) διάταξη.
(γ) Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών, ορίζουμε τη σχέση σ ως εξής:
$x \, \sigma \, y \iff$ ο αριθμός $3x - 2y$ είναι άρτιος (δηλαδή υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $3x - 2y = 2k$).
Να εξετάσετε αν η σ είναι ανακλαστική (αυτοπαθής), συμμετρική, αντισυμμετρική και μεταβατική.

Θέμα 4. [2 μον.]
(α) Αν $f : X \to Y$ είναι μια συνάρτηση, και K, Λ είναι δύο υποσύνολα του Y να δειχθούν οι ισότητες

$$f^{-1}(K \cup \Lambda) = f^{-1}(K) \cup f^{-1}(\Lambda), \quad f^{-1}(K \cap \Lambda) = f^{-1}(K) \cap f^{-1}(\Lambda), \quad f^{-1}(K - \Lambda) = f^{-1}(K) - f^{-1}(\Lambda).$$

(β) Δίνονται X, Y δύο μη κενά σύνολα σύνολα, $\{A_i, \ i \in I\}$ μια διαμέριση του συνόλου X και $f : X \to Y$ μια συνάρτηση επί του συνόλου Y. Να δείξετε ότι η οικογένεια συνόλων $\{f(A_i), \ i \in I\}$ είναι μια διαμέριση του συνόλου Y.

Θέμα 5. [2 μον.]
(α) Να δοθεί ο ορισμός του συνόλου $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών και να αποδειχθεί ότι αν $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $a < \beta$ τότε υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $a < q < \beta$.
(β) Δίνονται τρεις θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z ώστε να ισχύει $x \cdot y < z$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ρητοί αριθμοί q_1, q_2 ώστε $x < q_1$, $y < q_2$ και $q_1 \cdot q_2 < z$. [Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε καταλλήλως το προηγούμενο ερώτημα].

Θέμα 6. [2 μον.]
(α) Να δώσετε τους ορισμούς της ισοδυναμίας (ισοπληθικότητας) συνόλων (συμβ. $A \simeq B$) και να δείξετε ότι είναι μια σχέση ισοδυναμίας στην κλάση όλων των συνόλων.
(β) Να δώσετε τον ορισμό της σχέσης $A \precsim B$ [το B υπερισχύει (πληθικά) του A] και να δείξετε ότι η σχέση $\precsim$ είναι ανακλαστική (αυτοπαθής), μεταβατική αλλά δεν είναι αντισυμμετρική.
(γ) Αν A, B είναι δύο πεπερασμένα σύνολα να δειχθεί ότι $\operatorname{card} A \cdot \operatorname{card} B = \operatorname{card}(A \cup B) \cdot \operatorname{card}(A \cap B)$ αν και μόνο αν $A \subseteq B$ ή $B \subseteq A$.

Καλή επιτυχία!